

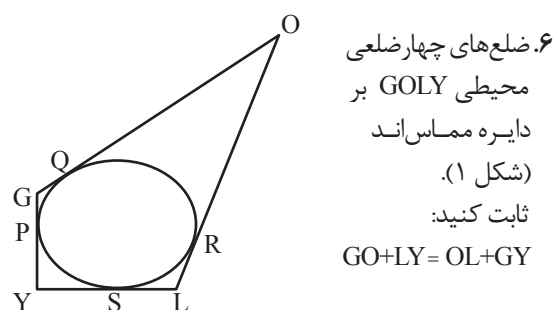
راه حلی دیگر

برای تمرینی از هندسه ۲

بر یک دایره مماس باشند، آنگاه چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می نامند.

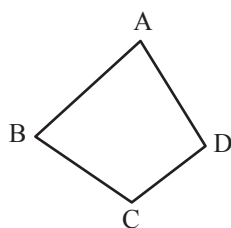
متن اصلی

در ادامه، تمرین های ۶ و ۷ موجود در صفحه ۵۶ کتاب درسی هندسه (۲)* را مشاهده می کنید که در اینجا سعی کرده ایم روشی غیر از روش پیشنهادی کتاب را برای حل آن ها به کار بگیریم:



شکل ۱

۷. در چهارضلعی ABCD داریم: $AB+CD = AD+BC$. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است. (شکل ۲). راهنمایی: روی ضلع AB، پاره خط $AM=AD$ و روی ضلع BC پاره خط $CN=CD$ را جدا کنید. از ویژگی مثلث های متساوی الساقین استفاده کنید.



شکل ۲

چهارضلعی محیطی

کلید واژه



مهدی میرزافام
دبیر دبیرستان های
شهرستان عجبشیر
استان آذربایجان شرقی

چکیده

در اثبات عکس یک قضیه معمولاً از روش برهان خلف بهره می گیریم و در مسیر اثبات از خود قضیه نیز استفاده می کنیم. وقتی با دانش آموزان کلاس برای حل این تمرین وارد بحث شدیم، از ایشان خواستیم که راه حل ارائه کنند. آن هایی که در منزل به تمرین فکر کرده بودند، تقریباً همه، راه حلی را که کتاب در راهنمایی خود ارائه داده است، پیشنهاد می کردند؛ ولی ناگهان متوجه شدیم که اگر تمرین ۶ را یک قضیه بدانیم، تمرین ۷ در واقع عکس این قضیه است. لذا می توانیم برای حل آن از روش برهان خلف استفاده کنیم.

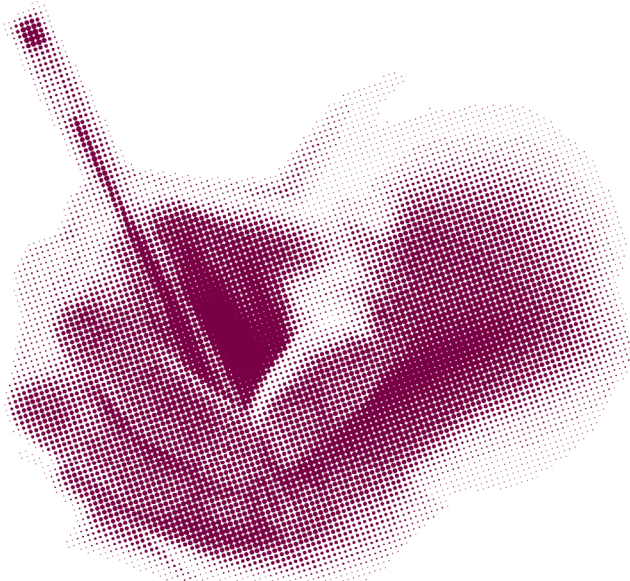
مقدمه

در اینجا چند اصطلاح را که در متن اصلی احتمالاً برایتان ناشناخته است، تعریف می کنیم و یا توضیح می دهیم:

* چندضلعی محدب: یک چندضلعی را محدب گویند هرگاه پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند، کاملاً در داخل آن قرار بگیرد. در یک چندضلعی محدب نیمسازهای داخلی هر دو رأس مجاور متقاطعند.

* قضیه وجود مثلث: اگر سه عدد حقیقی مثبت داشته باشیم و هریک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک تر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که اندازه ضلع های آن این سه عدد باشند.

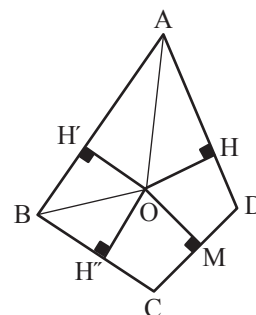
* چندضلعی محیطی: اگر همه ضلع های یک چندضلعی



اثبات: دو رأس مجاور دلخواه مانند A و B را انتخاب و نیم‌ساز داخلی آن‌ها را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند. طبق ویژگی نیم‌ساز یک زاویه داریم:

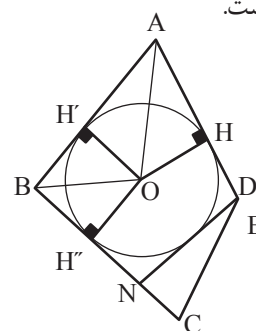
$$OH = OH' = OH'' = r$$

حال، اگر دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O رسم کنیم، سه ضلع AB، AD و BC به ترتیب در نقاط H، H' و H'' سه دایره مماس خواهند شد. از نقطه O عمود بر ضلع CD رسم می‌کنیم و محل فرود را M می‌نامیم. اگر $OM = r$ باشد، در این صورت دایره مذکور بر ضلع CD نیز مماس می‌شود و این یعنی چهارضلعی ABCD محیطی است و چیزی برای اثبات نخواهیم داشت. حال اگر چنین نباشد، یعنی اگر $OM \neq r$ (برهان خلف) که در این صورت یکی از حالات زیر پیش می‌آید:



شکل ۳

حالت اول: اگر $OM > r$ ، در این صورت دایره گفته شده داخل چهارضلعی خواهد افتاد. حال از رأس D مماسی بر دایره‌ای که گفته شد، رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن با ضلع BC را N می‌نامیم. این، یعنی چهارضلعی ABND، محیط بر دایره رسم شده است.



شکل ۴

حال طبق تمرین ۶ همین صفحه از کتاب درسی می‌توان نوشت:

$$AD + BN = AB + DN \quad (۱)$$

و طبق فرض داریم:

$$AD + BC = AB + CD \quad (۲)$$

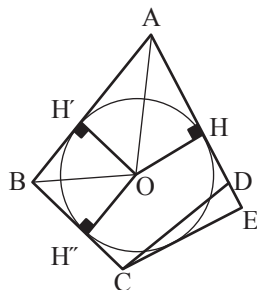
حال اگر طرفین رابطه (۱) را از طرفین رابطه (۲) کم کنیم، خواهیم داشت:

$$BC - BN = CD - DN \Rightarrow CN = CD - DN$$

$$\Rightarrow CN + DN = CD \quad (۳)$$

که رابطه (۳) با قضیه وجود مثلث در تناقض است (یعنی مثلث DNC قابل تشکیل نیست). لذا $OM > r$ نمی‌تواند درست باشد.

حالت دوم: اگر $OM < r$ در این صورت قسمتی از دایره گفته شده بیرون از چهارضلعی خواهد افتاد. حال از رأس C بر دایره، مماسی رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن با امتداد ضلع AD را E می‌نامیم. چهارضلعی ABCE محیط بر دایره رسم شده است.



شکل ۵

حال طبق تمرین ۶ همین صفحه از کتاب درسی می‌توان نوشت:

$$AB + CE = BC + AE \quad (۳)$$

و طبق فرض داریم:

$$AB + CD = BC + AD \quad (۴)$$

حال اگر رابطه (۴) را از رابطه (۳) کم کنیم، خواهیم داشت:

$$CE - CD = AE - AD \Rightarrow CE - CD = DE$$

$$\Rightarrow CE = CD + DE \quad (۵)$$

که رابطه (۵) با قضیه وجود مثلث در تناقض است (یعنی مثلث CDE قابل تشکیل نیست). لذا $OM < r$ نمی‌تواند درست باشد. مشاهده می‌کنیم در هر دو حالت ما به تناقض رسیدیم. لذا فرض خلف باطل و حکم یعنی $OM = r$ برقرار است.

پی‌نوشت‌ها

- * کتاب هندسه (۲)، مؤلفان: جواد حاجی بابایی، محمد هاشم رستمی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام‌آزاد، زهرا گویا، جعفر نیوشا، بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، عزیزه رحمانی، اسدالله رضوی و مرتضی میرمحمدرضایی.